Session PRINCIPALE 2008

Section : Math

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

Exercice n°1

A-CONTENU

Limites-Equations differentielles-Probabilité

B-REPONSES

1) Réponse - c - 2) Réponse - b - 3) Réponse - a -

Exercice n°2

A-CONTENU

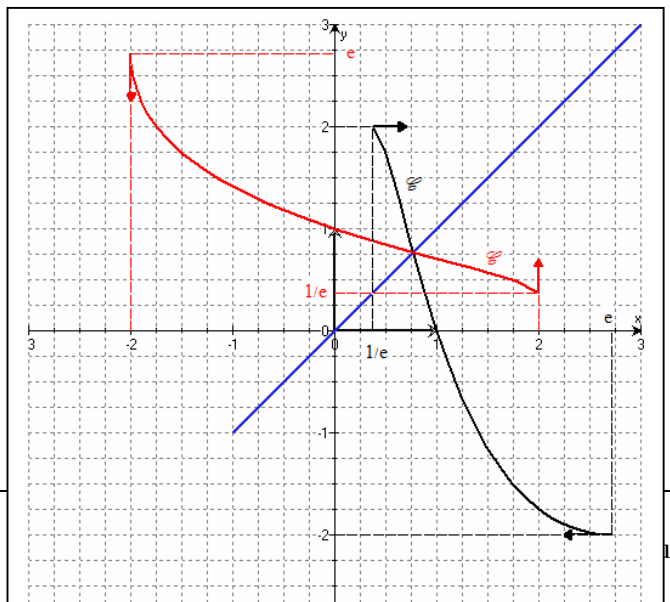
-fonction logarithme néperien-Fonction réçiproque d'une fonction continue et strictement monotone-

Exploitation d'un graphique-Traçage d'une courbe à partir d'une autre- Calcul intégral-Calcul d'aire

B-SOLUTION

1) a- D'après la courbe la fonction f est continue strictement décroissante sur $[e^{-1},e]$ donc réalise une bijection de $[e^{-1},e]$ sur $f([e^{-1},e])=[-2,2]$.

b- Voir courbe ci-jointe.



2) a- $a_1=\int_1^e \ln x.dx=[x\ln x-x]_1^e=1$.

b- $a_{n+1}=\int_1^e (\ln x)^{n+1}\,dx$. On intègre par parties,

on pose : $\begin{cases} u(x)=(\ln x)^{n+1} \to u'(x)=\frac{n+1}{x}(\ln x)^n \\ v'(x)=1 \quad\quad\quad \to v(x)=x \end{cases}$

Donc : $a_{n+1}=\left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^e-(n+1)\int_1^e(\ln x)^n\,dx$

Ainsi : $a_{n+1}=e-(n+1)a_n$.

c- Comme $a_2=e-2a_1=e-2$ donc $a_3=e-3a_2=e-3e+6$ ainsi $a_3=6-2e$.

3) a- $\int_1^e f(x).dx=\int_1^e\left((\ln x)^3-3\ln x\right)dx=\int_1^e(\ln x)^3\,dx-3\int_1^e \ln x.dx=a_3-3a_1$ donc

$\int_1^e f(x).dx=6-2e-3=3-2e$.

b- l'aire demandée est égale à la différence entre l'aire du rectangle de dimensions e et 2 et le réel $(\int_1^e -f(x)\,dx)$

Ainsi $A=2\times e+\int_1^e f(x)\,dx=2e+(3-2e)=\mathbf{3\,ua}$

Exercice n°3

A-CONTENU

Congruence –Divisibilité-Résolution ,dans ZxZ ,d'une équation du type ax+by=c

B-SOLUTION

1) $(-1,-1)$ est une solution particulière de (E): $3x-8y=5$.

Donc $3(x+1)=8(y+1)$ or : $\begin{cases} 3\wedge 8=1 \\ 8/3(x+1) \end{cases}$ donc d'après le lemme de Gauss $8/(x+1)$ par suite

Il existe un entier k tel que $x=8k-1$ $(k\in ¢)$ .Remplaçons x par sa valeur on obtient $8(y+1)=3\times 8k$ $(k\in ¢)$ par suite $y=3k-1$ $(k\in ¢)$.

Pour la réciproque, il suffit de vérifier que tout entier k le couple $(8k-1,3k-1)$ est solution de l'équation (E). D'où

$$S_{¢\times ¢}=\left\{(8k-1,3k-1)\ ;\ k\in ¢\right\}.$$

2) a- On a : $\begin{cases} 3x=n-2 \\ 8y=n-7 \end{cases}$ donc $3x-8y=(n-2)-(n-7)=5$ d'où (x,y) est solution de (E)

b- si n est solution (S) alors $\begin{cases} n=3x+2 \quad (x\in ¢) \\ n=8y+7 \quad (y\in ¢) \end{cases}$ donc (x,y) est solution de (E) d'où

$\begin{cases} x=8k-1 \\ y=3k-1 \end{cases}$ $(k\in ¢)$ et par suite $n=3(8k-1)+2=24k-1$ ainsi $n\equiv -1\ (\mathrm{mod}\,24)$ donc $n\equiv 23\ (\mathrm{mod}\,24)$.

Réciproquement ,soit n un entier vérifiant $n\equiv 23\ (\mathrm{mod}\,24)$ donc $n=24K+23$ $(K\in ¢)$ d'où

$\begin{cases} n=3(8K+7)+2 \\ n=8(3K+2)+7 \end{cases}$ $(K\in ¢)$ ainsi $\begin{cases} n=3k+2 \ (k\in ¢) \\ n=8k'+7 \ (k\in ¢) \end{cases}$ par suite n est solution de $(S)\begin{cases} n\equiv 2 \ (\text{mod}\,3) \\ n\equiv 7 \ (\text{mod}\,8) \end{cases}$

3) a- $\begin{cases} 2^2\equiv 1 \ (\text{mod}\,3) \\ 7^2\equiv 1 \ (\text{mod}\,8) \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2^{2k}\equiv 1 \ (\text{mod}\,3) \\ 7^{2k}\equiv 1 \ (\text{mod}\,8) \end{cases}$ $(k\in ¥)$

b- • $\begin{cases} 1991=3\times 663+2 \\ 1991=8\times 248+7 \end{cases}$ ainsi $\begin{cases} 1991\equiv 2 \ (\text{mod}\,3) \\ 1991\equiv 7 \ (\text{mod}\,8) \end{cases}$ par suite 1991 est solution de (S).

• Comme 1991 est solution de (S) donc $1991\equiv 23 \ (\text{mod}\,24)$ ou encore $1991\equiv -1 \ (\text{mod}\,24)$

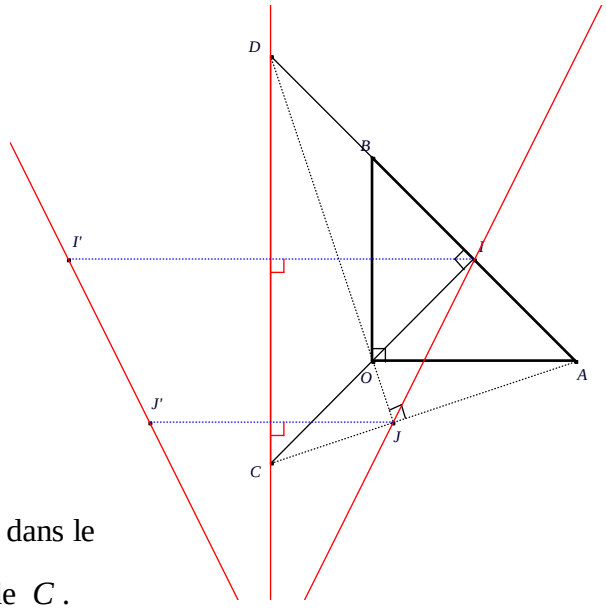
Donc $(1991)^{2008}\equiv(-1)^{2008} \ (\text{mod}\,24)$ d'où $(1991)^{2008}\equiv 1 \ (\text{mod}\,24)$ on en déduit alors que $(1991)^{2008}-1$ est divisible par 24.

Exercice n°4

A-CONTENU

Similitude directe-Similitude indirecte-
Composée de similitudes –Symétrie axiale

B-SOLUTION



1) • Le rapport de f est : $\frac{DC}{AO}=\frac{2OB}{OB}=2$

•L'angle de f est $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{DC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2) a- $(IC)\perp(AD)$ *car* (IO) est la médiatrice de $[AB]$ donc dans le triangle ACD, la droite (IC) porte la hauteur issue de C.

$(AO)\perp(CD)$ donc dans le triangle ACD, la droite (AO) porte la hauteur issue de A.

donc $(IC)\cap(AO)=\{O\}$ est l'orthocentre du triangle ACD.

b- • $f((OJ))$ est la perpendiculaire à (OJ) passant par $f(O)=C$ qui n'est autre que la droite (AC).

• $f((AJ))$ est la perpendiculaire à (AJ) passant par $f(A)=D$ qui n'est autre que la droite (DJ).

• On a $f((OJ))\cap f((AJ))=(AC)\cap(DJ)=\{J\}$, comme $\{J\}=(OJ)\cap(AJ)$ alors

$\{f(J)\}=f((OJ))\cap f((AJ))=\{J\}$ donc J est invariant par f,qui est de rapport $\neq 1$ d'où J est l'unique point fixe par f et par suite J est le centre de f.

3) a- • $\frac{ID}{IA}=\frac{2IB}{IB}=2$ donc g est de rapport 2.

• L'axe de g porte la bissectrice intérieur de $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}\right)$ qui n'est autre que (IC).

• Comme la forme réduite de g est $g=h_{(I,2)}\circ S_{(IC)}=S_{(IC)}\circ h_{(I,2)}$ donc

$g(O)=h_{(I,2)}\circ S_{(IC)}(O)=h_{(I,2)}(O)=C$ car $\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IO}$.

b- • $g \text{ o } f^{-1}(C) = g(O) = C$ par suite $g \text{ o } f^{-1}(C) = C$.

• $g \text{ o } f^{-1}(D) = g(A) = D$ par suite $g \text{ o } f^{-1}(D) = D$.

• $g \text{ o } f^{-1}$ est la composée d'une similitude indirecte g de rapport 2 et d'une similitude directe f^{-1} de rapport $\frac{1}{2}$ donc $g \text{ o } f^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport $2 \times \frac{1}{2} = 1$ donc c'est un antidéplacement .Comme $g \text{ o } f^{-1}$ fixe les points C et D on a alors $g \text{ o } f^{-1} = S_{(CD)}$.

4) a- • $g \text{ o } f^{-1}(J) = g(J) = J'$ par suite $g \text{ o } f^{-1}(J) = J'$.

• $g \text{ o } f^{-1}(I') = g(I) = I$ par suite $g \text{ o } f^{-1}(I') = I$.

b- Comme $g \text{ o } f^{-1}(J) = J'$ et $g \text{ o } f^{-1}(I') = I$ donc $S_{(CD)}(J) = J'$ et $S_{(CD)}(I) = I'$ d'où $S_{(CD)}((IJ)) = (I'J')$

Montrons que les droites (IJ) et (CD) sont sécantes .

Supposons qu'elles sont parallèles.On a : $S_{(CD)}(J) = J'$ *donc* $(CD) \perp (JJ')$ ce qui donne $(JI) \perp (JJ')$

D'autre part, $f(I) = I'$ *donc* $(JI) \perp (JI')$ car *f est* de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ *Ainsi* , $(JI') \perp (JJ')$

par suite les points J,J'et I' sont alignés ce qui est absurde **.**

les droites (IJ) et (CD) sont sécantes et $S_{(CD)}((IJ)) = (I'J')$ Donc les droites $(IJ),(I'J') et (CD)$ sont concourantes

Exercice n°5

A-CONTENU

Produit vectoriel- - Homothétie –Image d'un plan par une homothétie– Plans parallèles –Image d'un tétraèdre par une homothétie-Calcul de volumes .

B-SOLUTION

1) a- Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ ainsi $\begin{cases}x_E = -1+1 = 0\\ y_E = 2+0 = 2\\ z_E = 1+2 = 3\end{cases}$ d'où $E(0,2,3)$

b- $V_{ABCE} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AE}| = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}| = \frac{1}{6}AE^2 = 1$ uv.

2) a- $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ donc il est normal au plan (ABC) et $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P et colinéaire à $\overrightarrow{AE}$ donc P est parallèle au plan (ABC).

b- • à partir de la relation $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ on obtient $K(0,1,3)$

• les coordonnées du point K vérifient : $0-2-3+5=0$ donc $K \in P$.

3) a- On sait que $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$ donc $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{0}$ d'où $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ ainsi h est de rapport $\frac{1}{3}$.

b- On sait que $V_{EIJK}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IE}\right|$ or on a :

$h((ABC))$ est un plan parallèle à (ABC) passant par $h(C)=K$ donc $h((ABC))=\mathsf{P}$.

Par suite comme A est un point de (ABC) donc $h(A)$ est un point de P vérifiant A , $h(A)$ et E alignés. Donc $h(A)=I$.

De même comme B est un point de (ABC) donc $h(B)$ est un point de P vérifiant B , $h(B)$ et E alignés. Donc $h(B)=J$ de plus, vu que $h(C)=K$ et $h(E)=E$ on aura

$$V_{EIJK}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IE}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\wedge\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right).\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{27}\left(\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AE}\right|\right)=\frac{1}{27}V_{ABCE}=\frac{1}{27}.$$

Donc le volume du tétraèdre EIJK est $V_{EIJK}=\frac{1}{27}$.

FIN.